به نام زندگی

www.dr-haghbin.info
ahaghbin@gmail.com

مروری بر نظریه مجموعه ها

* مجموعه های A_1 ، A_2 ، ... ، A_n را روی هم فرسا (exhaustive)
می‌گوییم اگر اجتماع آنها ، مجموعه‌ی مرجع Ω را به دست بدهد.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

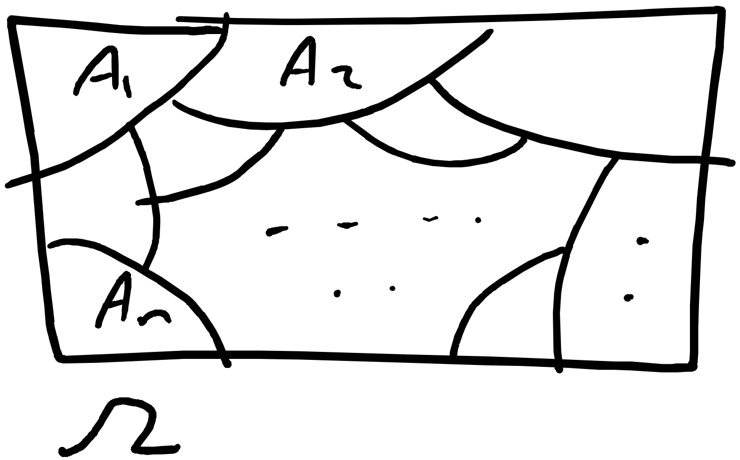
* اگر مجموعه های A_1 ، A_2 ، ... ، A_n روی هم فضا و دو به دو جدا از هم باشند، یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{یا} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

و

$$\forall i \neq j \;;\quad A_i \cap A_j = \Phi$$

در این صورت مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ را یک افراز از مجموعه ی Ω می گوییم (یا می گوییم مجموعه های $A_1, \dots, A_n$ ، مجموعه ی Ω را افراز کرده اند)



* مفهوم ضرب دکارتی دو مجموعه

منظور از ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A ، B ، مجموعه‌ای از زوج مرتب های (a_i, b_j) است به طوری که $b_j \in B$ ، $a_i \in A$ هستند.

$$A \times B = \{ (a_i , b_j) \mid a_i \in A , b_j \in B \}$$

$$\underbrace{|A|}_{\text{تعداد اعضای مجموعه } A} = m , \quad |B| = n \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots , m \\ j = 1, 2, \dots , n \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad |A \times B| = mn$$

با توجه به تعریف ضرب دکارتی ، متوجه می‌شویم
که ضرب دکارتی دو مجموعه ، خاصیت جابه‌جایی
ندارد.

مثال: در مجموعه‌ی

$$\Omega_1 = \{H, T\}$$

و

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

را در نظر بگیرید. ضرب دکارتی $\Omega_1 \times \Omega_2$ را به دست بیاورید.

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(H,1), (H,2), \dots, (H,6), (T,1), (T,2), \dots, (T,6)\}$$

این مثال می‌تواند کاربرد ضرب دکارتی را در فضای احتمال به ما نشان
می‌دهد. در واقع ضرب دکارتی $\Omega_1 \times \Omega_2$ نشان دهنده‌ی
فضای نمونه برای آزمایش پرتاب یک سکه و پرتاب یک تاس است.
این موضوع را در فضای احتمال و مسائل مربوط به آن به طور مکرر
استفاده خواهیم کرد.

با این مقدمه بر روی نظریه‌ی مجموعه‌ها، به بحث احتمال برمی‌گردیم.
همانطور که اشاره شد، هدف این است که بتوانیم به هر پیشامدی
در ارتباط با فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی، یک احتمال (یک تابع
احتمال) به صورت عددی بین صفر و یک نسبت بدهیم. برای این
منظور، بر روی فضای احتمال کار می‌کنیم که یک فضای جبری است
و تابع قوانین ریاضیاتی فضاهای جبری است.

فضای احتمال از عناصر زیر تشکیل شده است،

1- فضای نمونه Ω به عنوان مجموعه‌ای از تمام نتایج ممکن آزمایش تصادفی

2- هر پیشامد E به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه

$E \subseteq \Omega$

3- احتمال P (تابع احتمال $P(E)$) که به هر پیشامد E یک عدد

(بین صفر و یک) به عنوان احتمال آن پیشامد، نسبت می‌دهد.

فضای احتمال $\longrightarrow$ (Ω, E, P) یا $(\Omega, E, P(E))$

فضای نمونه

پیشامد

تابع احتمال

(در ریاضیات به این فضاها، فضای σ_Field یا Borel_Field گفته می‌شود که در این درس با جزئیات این فضا، سروکار نداریم)

از فضای احتمال یا در حقیقت Ω (فضای نمونه) و ϵ (پیش‌آمدها
در کتب‌های قبل آشنا شدیم. در ادامه می‌خواهیم با مفهوم احتمال
P به عنوان تابعی که به هر پیش‌آمد دلخواه ϵ یک عدد نسبت
می‌دهد، آشنا بشویم.

$$P \equiv P(\epsilon) \equiv P_r\{\epsilon\} \equiv P_\epsilon$$

در رابطه با احتمال ابتدا سه اصل اساسی را بیان خواهیم کرد و سپس با کمک چند قضیه، ویژگی های تابع احتمال را معرفی می کنیم. قبل از پرداختن به این مطالب، ابتدا چند مفهوم ابتدایی را معرفی می کنیم.

* مفهوم رخ دادن یا پیش آمد $\in$: منجر شدن نتیجه ی آزمایش متعلق به یکی از اعضای مجموعه ی S $\in$

* اگر پیشامدی غیرممکن باشد، احتمال وقوع آن برابر صفر است.

* بعنوان مثال مجموعه ی ϕ غیرممکن است. یعنی نتیجه ی
آزمایش تصادفی، هیچگاه، منجر به یکی از اعضای این پیشامد نمی شود.

* پیشامد حتمی، پیشامدی است که همواره رخ می دهد. یعنی نتیجه ی
آزمایش تصادفی، همواره یکی از اعضای این پیشامد است. فضای نمونه S

Ω یک پیشامد حتمی است. $\qquad P(\Omega) = 1$

احتمال یک پیشامد حتمی برابر یک است.

* سه اصل اساسی احتمال

تابع احتمال برای هر پیشامد دلخواه E، از اصول زیر پیروی می‌کند.

۱- تابع احتمال همواره غیرمنفی است $\qquad \forall E \subseteq \Omega \; ; \; P(E) \geq 0$

2 - همواره داریم

$$P(\Omega) = 1$$

(فضای نمونه یک پیش آمد حتمی است)

3 - اگر پیش آمدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_n دو به دو جدا از هم باشند یعنی

$$\forall i \neq j \;;\; A_i \cap A_j = \phi$$

به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی باشد یا هیچ گاه با هم رخ ندهند یا رخ دادن هر دو پیش آم

باجمع، غیرممکن باشد. در این صورت

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

با دانستن این سه اصل اساسی و با استفاده از چند قضیه، ویژگی‌های پایه‌ای تابع احتمال را معرفی خواهیم کرد و سپس به تعریف دقیق ریاضی از احتمال بیان خواهیم کرد.

قضیه‌ی یک: برای هر پیشامد دلخواه A داریم

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

اثبات: می‌دانیم که

$$A \cup A^c = \Omega \quad (1)$$

از طرف دیگر می‌دانیم $A \cap A^c = \emptyset$ بنابراین براساس اصل (3)

می‌توان نوشت:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \overset{(1)}{=} P(\Omega) \underset{\text{اصل } 2}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

قضیه 2 (نتیجه‌ی قضیه 1)

$$P(\phi) = 0$$

اثبات: می‌دانیم که طبق قضیه 1، $P(A^c) = 1 - P(A)$

از طرف دیگر $\Omega^c = \phi$ بنابراین

$$P(\phi) = 1 - \overbrace{P(\Omega)}^{1} = 0$$

قضیه 3 : برای هر پیشامد دلخواه A داریم $P(A) \leq 1$

اثبات : با توجه به قضیه 1 می دانیم $P(A^c) = 1 - P(A)$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$

از طرف دیگر می دانیم $\forall A \subseteq \Omega \; ; \; P(A) \geq 0$

$P(A^c) \geq 0 \implies P(A) \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \forall A \subseteq \Omega \; ; \quad P(A) \leqslant 1$$

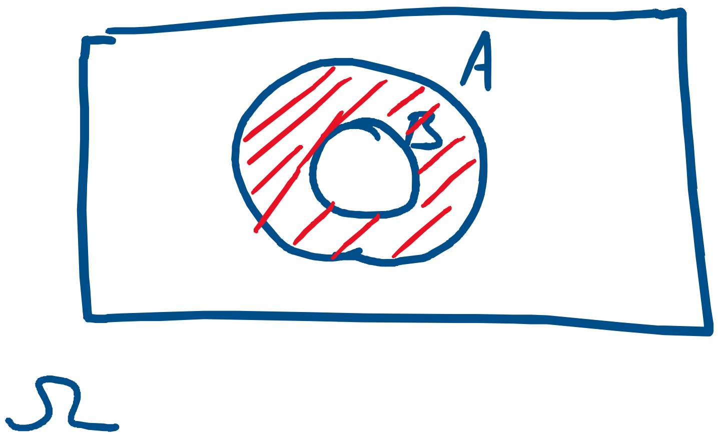
تعبیر: با توجه به اصل 1 و قضیه 3 می‌توان نوشت:

$$\forall A \subseteq \Omega \; ; \quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

قضیه ی 4 : برای دو پیشامد A و B اگر داشته باشیم $B \subseteq A$

آنگاه می توان نتیجه گرفت که $P(B) \leqslant P(A)$

اثبات : می دانیم



$$A = B \cup (\overbrace{A - B}^{A \cap B^c})$$

همچنین می دانیم

$$B \cap (\overbrace{A - B}^{A \cap B^c}) = \varphi$$

$$\xRightarrow{\text{اصل } 3} \quad P(A) = P(B) + P(\overbrace{A-B}^{A \cap B^c}) \qquad (**)$$

$P(A-B) \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad P(A) \geq P(B)$$

$P(A) \geq 0$

$P(B) \geq 0$

اصل 1

$$B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad P(B) \leq P(A)$$

قضیه‌ی 5 (نتیجه‌ی قضیه‌ی 4) اگر برای دو پیشامد A , B
داشته باشیم $B \subseteq A$ آنگاه

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

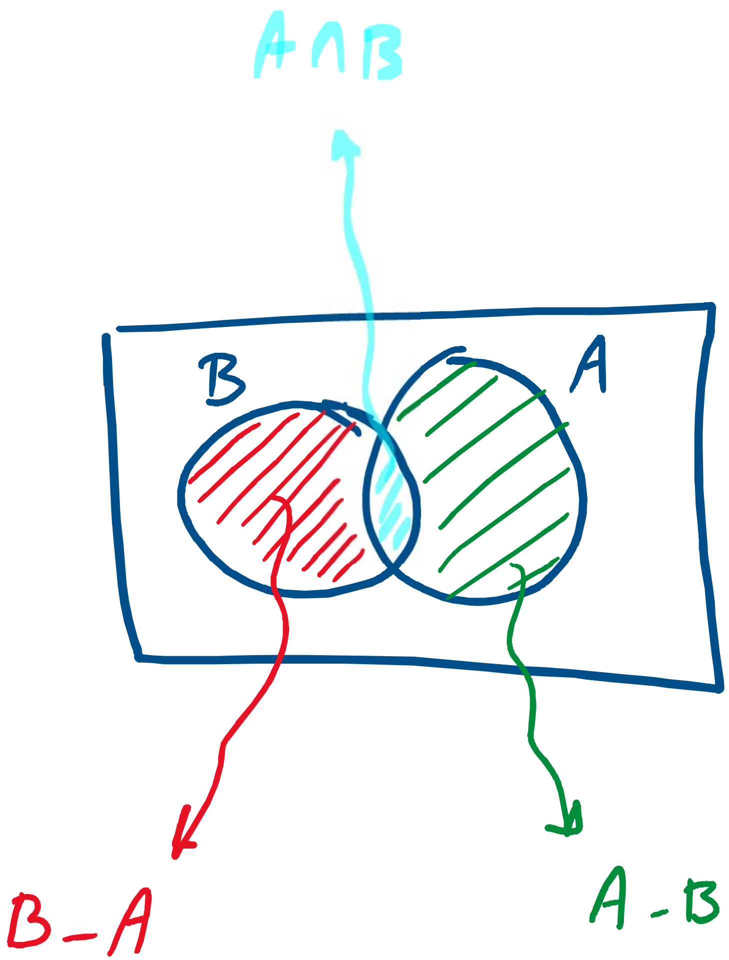
اثبات: در روند اثبات قضیه‌ی 4، دیدیم که

$$P(A) = P(B) + P(A-B) \qquad (**)$$

$$B \subseteq A \Longrightarrow P(A-B) = P(A) - P(B)$$

قضیه 6 : برای هر دو پیشامد دلخواه A , B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



اثبات:

می دانیم که

$$A\cup B = B \cup (\overbrace{A-B}^{A\cap B^c})$$

از طرف دیگر می دانیم که

$$B\cap(\overbrace{A-B}^{A\cap B^c}) = \varphi$$

$$\xRightarrow{\text{اصل } 3} P(A\cup B) = P(B) + P(\overbrace{A-B}^{A\cap B^c}) \qquad (II)$$

از طرف دیگر می توان نوشت

$$A = A \cap (\overbrace{B \cup B^c}^{\Omega}) = (A \cap B) \cup (\overbrace{A \cap B^c}^{A-B})$$

$(A \cap B)$ و $(A \cap B^c)$

جدا از هم هستند

$$\Longrightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(\overbrace{A \cap B^c}^{A-B})$$

$$\Longrightarrow P(\overbrace{A \cap B^c}^{A-B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad (I)$$

$(I), (II) \Longrightarrow$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

با استفاده از قضیه های بالا ، توانستیم ویژگی های بیشتری را در مورد
تابع احتمال به دست بیاوریم. همچنین به عنوان یک نتیجه ی کلی از قضیه های
بالا ، می توان گفت که برای به دست آوردن احتمال هر پیش آمد الزاماً
روی فضای نمونه ، می توانیم از قضیه ها کمک بگیریم و پیش آمد را برحسب

پیش آمدهای ساده‌تری بیان کنیم و احتمال آن را به دست بیاوریم.

* به عنوان مثال اگر در مسأله‌ای به دست آوردن $P(A)$ پیچیده باشد می‌توانیم $P(A^c)$ را به دست بیاوریم و از قضیه‌ی اول کمک بگیریم و

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

به دست می‌آید.

به عنوان مثال ممکن است که پیش آمد E را بتوانیم بر حسب اجتماع یا اشتراک چندین پیش آمد ساده‌تر بنویسیم و با کمک قضیه‌ها احتمال آن را محاسبه کنیم.